

Studiul oscilațiilor forțate. Pendulul Pohl

Rezonanța mecanică

Cuvinte cheie: oscilație, amplitudine (A), frecvență (ν), viteză liniară (v), viteză unghiulară (ω), pulsație (ω), fază (φ), fază inițială (φ_0), mișcare armonică, oscilator liniar armonic, oscilație amortizată, raport de amortizare (K), decrement logaritmic (Λ), coeficient de amortizare (δ), ecuație diferențială de ordinul II, regim amortizat, regim critic, regim aperiodic, regim critic, frecvență proprie (ν_0), perioadă proprie (T_0), forță și momentul forței (F și M_F), rezonanță, curbă de rezonanță, frecvență de rezonanță, bandă de trecere (B), factor de calitate (Q), fazor, diagramă fazorială.

Principiu

Dacă unui sistem oscilant îi este permis să oscileze liber se observă descreșterea amplitudinilor maxime succesive, această descreștere fiind dependentă de frecări. Dacă sistemul oscilant în oscilația sa este excitat din exterior aplicându-i un *moment al forței* periodic M_F , observăm cu după stabilirea regimului staționar în timp amplitudinea nou stabilită este dependentă de *frecvența și amplitudinea acestui moment al forței extern aplicat*, și bineînțeles este dependentă și de *frecări*. $A(\omega_{ext}, M_{F_{max}}, \delta)$. Frecvențele proprii ale oscilațiilor libere, precum și *curbele de rezonanță* ale oscilațiilor forțate pentru diferite valori de frecări, urmează să fie determinate.

Echipament

Pendul Phol de torsiune	1
Sursă de tensiune variabilă, 25V CA/ 10V CC, 12A	1
Punte redresoare, 30V CA/ 1A CC	1
Cronometru digital, precizie: 1/100 sec	1
Multimetru digital	1
Cablu de conectare, l=250mm, galben	2
Cablu de conectare, l=750mm, roșu	2
Cablu de conectare, l=750mm, albastru	3

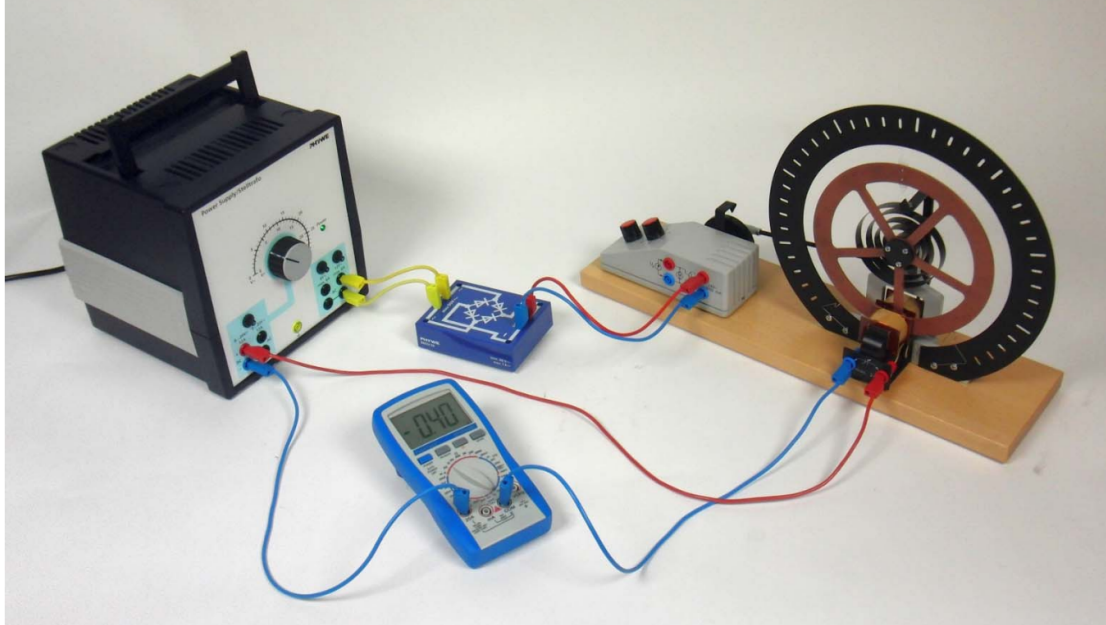


Figura 1: Montaj experimental - Pendul Phol

Obiective

A. Oscilații libere

1. Determinarea perioadei proprii de oscilație T_0 și a frecvenței proprii ν_0 , în cazul fără frecări
2. Determinarea perioadei proprii de oscilație T_0 și a frecvenței proprii ν_0 pentru diferite valori ale frecării. Calcularea rapoartelor de amortizare $K = \frac{A_n}{A_{n+1}}$, a coeficienților de amortizare δ și decremenților logaritmici K .
3. Observarea regimului aperiodic și a regimului critic

B. Oscilații forțate

1. Determinarea curbelor de rezonanță $A(\omega_{ext})$ și reprezentarea lor grafică folosind coeficienții de amortizare calculați la punctul A. Determinarea frecvențelor de rezonanță corespunzătoare și compararea lor cu frecvențele proprii găsite anterior la punctul A.
2. Observarea atentă a schimbării fazei între pendulul de torsiune și discul extern care îl excită, pentru cazul unor frecări mici și pentru diferite frecvențe de excitație din partea discului excitator.

Montaj Experimental

Montajul experimental este prezentat în Figura (1) și Figura (2). Ieșirea de la sursa de alimentare de curent continuu este legată la elementele de frânare prin curenți eddy (vezi magnetii bobinați de sub discul pendulul Pohl). Discul rotitor motor care va excita pendulul Pohl de asemenea are nevoie de alimentare pentru a se roti cu diferite frecvențe ν_{ext} . Pentru a obține curent continuu pentru discul rotitor, este introdusă o punte redresoare între ieșirea sursei de alimentare CA (curent alternativ) de 12V și cele două ieșiri ale discului rotitor motor(vezi Figura(3)). Curentul continuu furnizat magnetilor bobinați va transforma magnetii în electromagneți care frânează discul metalic Pohl. Cu cât curentul continuu furnizat $I_{frânare}$ va fi mai mare cu atât mai puternice vor fi frecările.

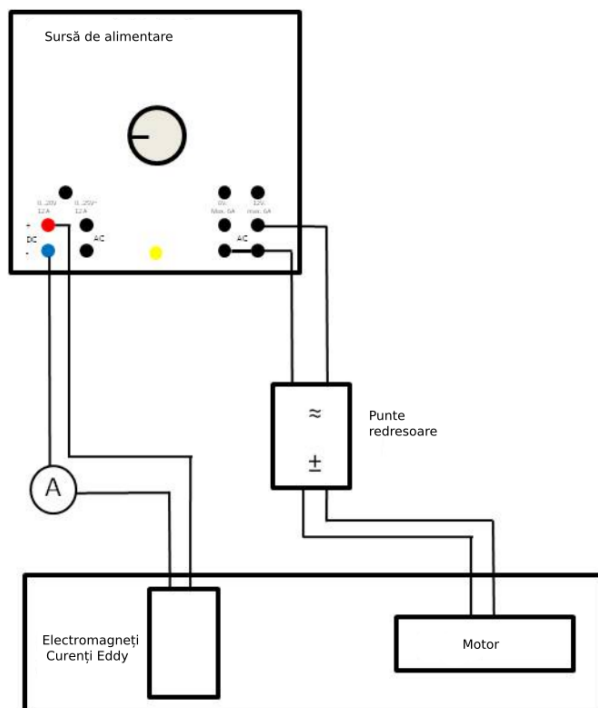


Figura 2: Schema cu legăturile electrice din montajul experimental

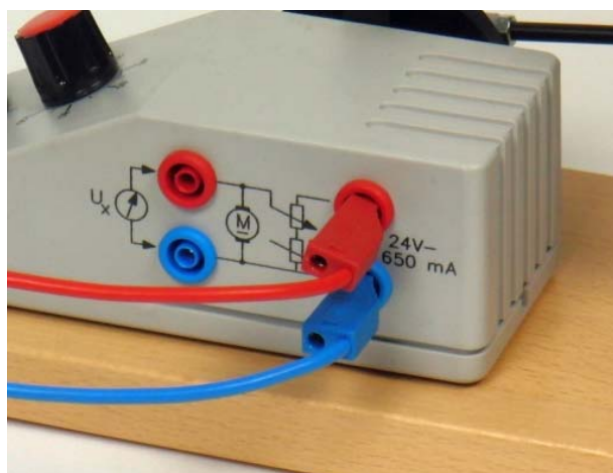


Figura 3: Alimentarea discului motor extern care va excita pendulul Phol

Mod de lucru

A. Oscilații libere

1. *Determinarea perioadei proprii de oscilație T_0 și a frecvenței proprii de oscilație ν_0 , în cazul fără frecări*

Pentru a determina frecvența proprie ν_0 , pulsația proprie ω_0 a pendulului Pohl de torsiune, în cazul fără frecări ($I_f = 0$) :

- deviați pendulul complet într-o parte
- măsurați cu cronometrul timpul pentru mai multe oscilații

Măsurătorile trebuie repetate pentru a calcula o perioadă proprie medie $\overline{T_0}$.

2. *Determinarea perioadelor de oscilație și a frecvențelor corespunzătoare, în cazul cu diferite valori ale frecării*

În același mod frecvențele caracteristice cazului de oscilații cu frecări (oscilații amortizate) vor fi măsurate pentru următoarele valori ale curenților eddy de frânare:

$$I_f \sim 0,25A, (U_{\sim} = 4V)$$

$$I_f \sim 0,40A, (U_{\sim} = 6V)$$

$$I_f \sim 0,55A, (U_{\sim} = 8V)$$

$$I_f \sim 0,9A, (U_{\sim} = 12V)$$

Pentru a determina valorile care caracterizează frecările adică a rapoartelor de amortizare (K), a decrementilor logaritmici (Λ), a coeficienților de amortizare (δ), se măsoară și se notează valorile amplitudinilor succesive care sunt atinse într-o parte pe discul gradat al pendulului Pohl.

- deviați pendulul complet într-o parte
- observați mărimea amplitudinilor succesive în oscilațiile amortizate

Inițial trebuie să asigurăm că poziția cursorului pendulului în repaus este exact la 0 grade pe scara circulară gradată a pendulului Phol gradată cu 20 de grade arbitrar într-o parte și în cealaltă. Această reglare se realizează din rotirea discului motor la care este legat discul pendulului Phol.

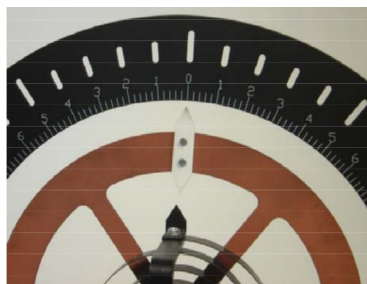


Figura 4: Poziția de zero a pendulului Phol

3. Observarea regimului aperiodic și a regimului critic

Pentru a obține cazul regimului aperiodic ($I_f \sim 2,0A$) și cazul critic ($I_f \sim 2,3A$) curenții eddy de frânare din sârmele bobinelor magnetilor trebuie să depășească valoare de $2,0A$. Pentru siguranță nu folosiți curenți de peste $2,0A$ mai multe de câteva minute.

B. Oscilații forțate

Pentru a stimula pendulul de torsiune Pohl, acesta este conectat la un disc motor rotitor printr-o tijă. Frecvența de excitație ω_{ext} a motorului poate fi determinată folosind cronometrul și măsurând timpii necesari discului pentru a realiza rotații complete. (de exemplu 10 rotații)

1. Determinarea curbelor de rezonanță și reprezentarea grafică a acestora folosind frecările de la punctul A.

Măsurătoarea începe cu valori mici ale pulsațiilor de excitație ω_{ext} . Apoi ω_{ext} este crescută cu ajutorul celor două butoane potențiometre (un buton de reglare brută și un al doilea de reglare fină, Fig.(5)). Se notează amplitudinile, care se stabilesc în regim staționar după un timp, pentru fiecare pulsație ω_{ext} . În cazul frecărilor mici, trebuie aleasă o frecvență ω_{ext} în așa fel încât pendulul Pohl să nu iasă din scală în timpul oscilațiilor.



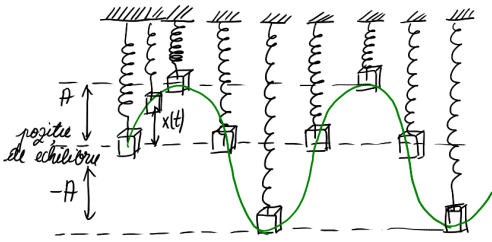
Figura 5: Reglarea pulsației ω_{ext} a discului motor prin două potențiometre (reglare brută și reglare fină)

2. Observarea defazajului între pendulul Pohl de torsiune și discul motor extern excitator, pentru valori mici ale frecării, pentru diferite pulsații ω_{ext}

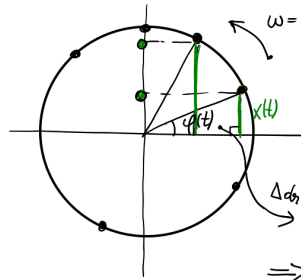
Alegem frecări mici și stimulăm pendulul într-un caz cu pulsația ω_{ext} mult sub frecvența de rezonanță, iar în celălalt caz mult deasupra frecvenței de rezonanță. Observați transferul de fază, schimbarea de fază dintre pendulul de torsiune și momentul forței extern al motorului. În orice caz, notări ale mărimilor trebuie luate doar când sistemul a ajuns la un regim staționar.

În cele ce urmează este prezentată o schiță cu noțiuni de liceu despre oscilații.
Să ne reamintim!

OSCILATORUL LINIAR ARMONIC FĂRĂ FRECĂRI



$x(t)$ - elongația
 A - amplitudine
 T - perioadă $[T]_{SI} = s$
 γ - frecvență $[\gamma]_{SI} = s^{-1}$



$\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$ - viteză unghiulară
 Proiectăm mișcarea circulară uniformă a mobilului pe axa verticală de coordonate x , astfel obținem o mișcare oscilatorie liniară.

$$\sin \varphi(t) = \frac{CO}{IP} = \frac{x(t)}{A} \Rightarrow x(t) = A \sin(\varphi(t))$$

Obs
 M.R.U. $x = x_0 + v \cdot (t - t_0)$
 M.C.U. $\alpha = \alpha_0 + \omega \cdot (t - t_0)$

$\varphi(t) \Rightarrow x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ **LEGEA MIȘCĂRII OSCILATORULUI LINIAR**

A ω φ_0

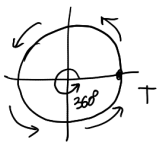
$A \uparrow \Rightarrow$ mișcarea devine mai amplă

$\omega \uparrow \Rightarrow$ mișcarea devine mai agitată

$\varphi_0 \uparrow \Rightarrow$ mișcarea este translatată (deplasată)

φ_0 - fază inițială

APLICAȚIE: REPREZINTĂ GRAFIC ÎN DESHOS O OSCILAȚIE ȘI VARIAZĂ ÎN TIMP REAL PARAMETRII EI

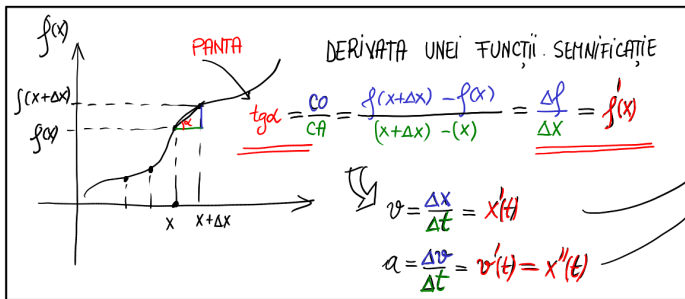


$$\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

1 rotație T secunde
 γ rotații 1 secundă

d.p. $\Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \frac{T}{1} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{T}} \quad [\gamma]_{SI} = s^{-1}$

SAU: $\boxed{T = \frac{\Delta t}{N}}$ $\Leftarrow \Delta t$ - intervalul de timp în care s-au efectuat N oscilații complete



$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Br. II:

$$F(t) = m \cdot a(t) = -m\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\boxed{F(t) = -K \cdot x(t)}$$

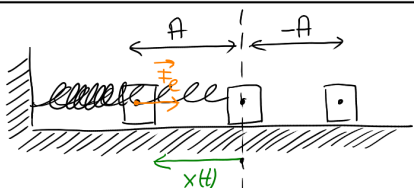
CINEMATICĂ
 OSCILATORULUI LINIAR
 ARMONIC

DINAMICĂ
 OSCILATORULUI LINIAR
 ARMONIC

$$\Rightarrow K = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}} \Rightarrow \text{Obs } T \sim m, T \sim \frac{1}{K}$$

T depinde de mărimea oscilatorului



Obs: Rezultanta forțelor $F(t)$ într-o mișcare oscilatorie mereu se opune existenței unei elongații $x(t)$, încercând să readucă mobilul în poziția de echilibru.
 $F(t)$ = forță de revenire

$$\boxed{F(t) = -K \cdot x(t)}$$

CRITERIU DE CLASIFICARE A UNEI MIȘCĂRI DREPT MIȘCARE OSCILATORIE LINIARĂ DIN PUNCT DE VEDERE DINAMIC

OSCILAȚII FĂRĂ FRECĂRI

Principiul II: $\vec{F}_e + \vec{N} + \vec{G} = m\vec{a}$ (mișcare accelerată)

$$-K \cdot x = m a$$

$$Kx + ma = 0$$

$$\boxed{Kx + m \ddot{x} = 0}$$

ECUAȚIE DIFERENȚIALĂ DE ORDIN 2 OMOGENĂ

SOLUȚIE: $\boxed{x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)}$

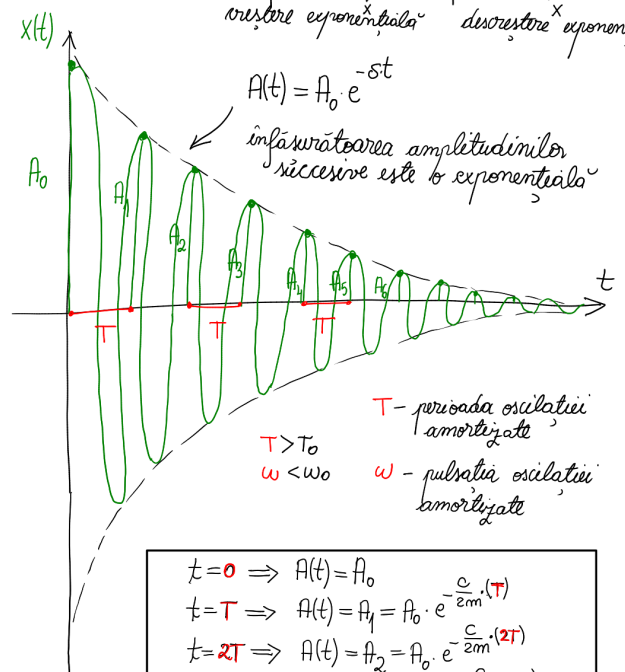
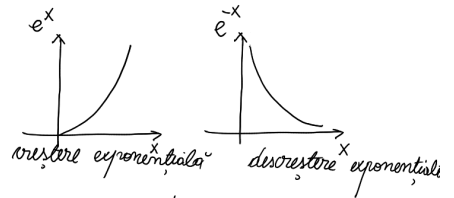
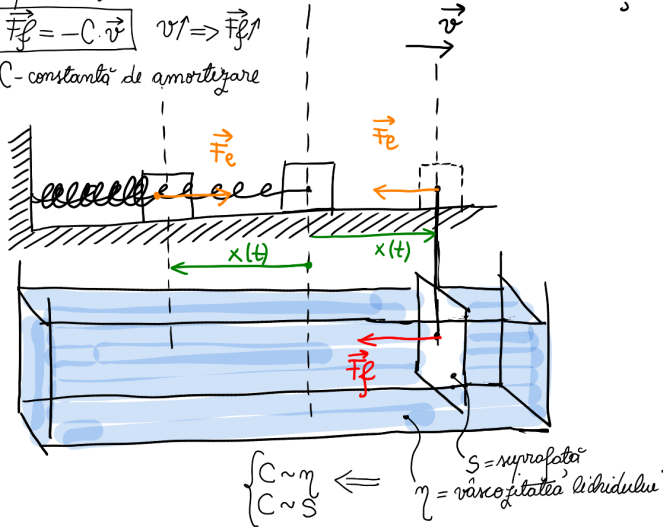
pulsatie proprie: $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$
 perioada proprie: $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$

OSCILATORUL LINIAR ARMONIC CU FRECĂRI OSCILAȚII AMORTIZATE

Aproximații:

$$\vec{F}_f = -C \cdot \vec{v} \quad v \neq 0 \Rightarrow \vec{F}_f \neq 0$$

C - constantă de amortizare



Principiul II: $\vec{F}_e + \vec{F}_f = m \cdot \vec{a}$ (mișcare accelerată)

$$-k \cdot x(t) - C \cdot v = m \cdot a$$

$$\Rightarrow K \cdot x + C \cdot v + m \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow K \cdot x + C \cdot \dot{x} + m \cdot \ddot{x} = 0 \quad \text{ECUAȚIE DIFERENTIALĂ DE ORDINUL II}$$

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot t} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

A(t) amplitudine variabilă în timp
amplitudinea scade exponențial

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot t} = A_0 \cdot e^{-\delta t}$$

$$\delta = \frac{C}{2m}$$

δ = COEFICIENT DE AMORTIZARE

= O MĂSURĂ CÂT DE MULT SCAD AMPLITUDINEA ÎN TIMP

$$K = \frac{A_{m+1}}{A_m}$$

K = RAPORT DE AMORTIZARE

= O MĂSURĂ CÂT SCAD AMPLITUDINILE SUCCESIV

$$\begin{aligned} t=0 &\Rightarrow A(t) = A_0 \\ t=T &\Rightarrow A(t) = A_1 = A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot T} \\ t=2T &\Rightarrow A(t) = A_2 = A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot (2T)} \\ t=3T &\Rightarrow A(t) = A_3 = A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot (3T)} \\ t=4T &\Rightarrow A(t) = A_4 = A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot (4T)} \\ &\dots \\ t=(m-1)T &\Rightarrow A(t) = A_{m-1} = A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot [(m-1)T]} \\ t=mT &\Rightarrow A(t) = A_m = A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot (mT)} \\ t=(m+1)T &\Rightarrow A(t) = A_{m+1} = A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot [(m+1)T]} \end{aligned}$$

$$\text{Obs: } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} < \omega_0$$

$$T > T_0$$

! DOAR PENTRU FRECĂRILE DE TIPUL $\vec{F}_f = -C \cdot \vec{v} \Rightarrow K = \frac{A_1}{A_0} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_2} = \dots = \frac{A_{m+1}}{A_m} = \frac{A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot [(m+1)T]}}{A_0 \cdot e^{-\frac{C}{2m} \cdot (mT)}} = e^{-\frac{C}{2m} \cdot T} = e^{-\delta T}$

$$\Rightarrow K = \frac{A_{m+1}}{A_m} = e^{-\delta T}$$

$$K = \text{constant}$$

FI E m OSCILAȚII:

δ (DETERMINAT TEORETIC)

?

$$\frac{A_m}{A_0} = \frac{A_1}{A_0} \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{A_3}{A_2} \cdot \frac{A_4}{A_3} \cdot \dots \cdot \frac{A_{m-1}}{A_m} \cdot \frac{A_m}{A_{m-1}} \quad \left| \ln() \right.$$

$$\ln\left(\frac{A_m}{A_0}\right) = \ln\left(\frac{A_1}{A_0}\right) + \ln\left(\frac{A_2}{A_1}\right) + \ln\left(\frac{A_3}{A_2}\right) + \ln\left(\frac{A_4}{A_3}\right) + \dots + \ln\left(\frac{A_m}{A_{m-1}}\right) =$$

$$\ln\left(\frac{A_m}{A_0}\right) = (-\delta T) + (-\delta T) + (-\delta T) + \dots + (-\delta T) = -\delta \cdot (mT)$$

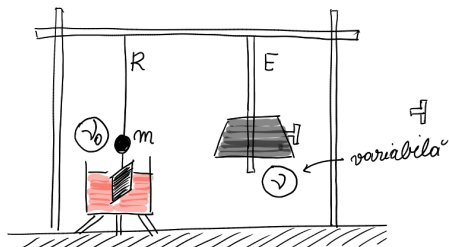
$$\delta = \frac{\ln\left(\frac{A_m}{A_0}\right)}{mT}$$

FORMULĂ DE DETERMINARE
A COEFICIENTULUI DE AMORTIZARE

OSCILATORUL CUPLAT. OSCILAȚII ÎNTREȚINUTE. OSCILAȚII FORȚATE

REZONANȚA

EXPERIMENT 1



R - rezonator
E - excitator

atunci când $\omega \approx \omega_0 \Rightarrow A = A_{\max}(R)$

$\Rightarrow$ REZONANȚĂ = transfer maxim de energie de la excitatorul (E) la rezonatorul (R).

Obs1 Excitatorul (E) îi impune frecvența rezonatorului (R).

Obs2 Singurul caz în care amplitudinea (R) este mai mare este în cazul în care frecvența excitatorului (E) este egală cu frecvența naturală proprie ω_0 a rezonatorului (R).

CONDIȚIA REALIZĂRII STĂRII DE REZONANȚĂ

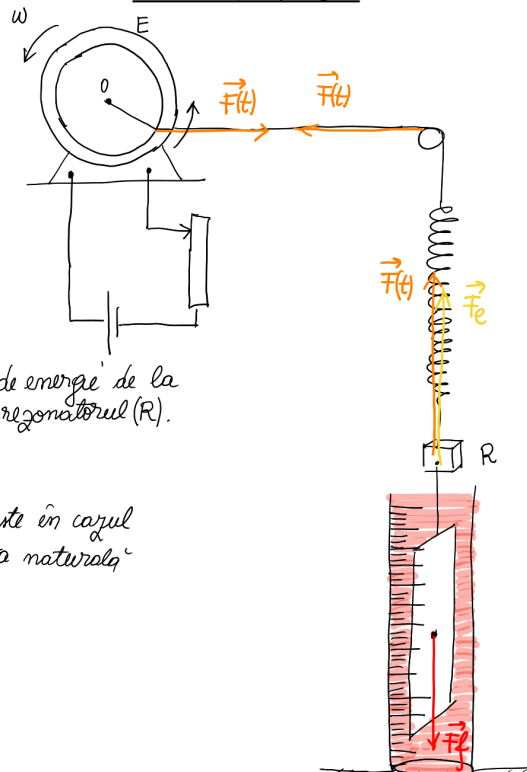
este ca perioada sistemului excitator să fie egală sau apropiată cu perioada naturală proprie de oscilație a sistemului rezonator.

$$T_{\text{excitator}} \approx T_{\text{rezonator}}$$

$$\omega_{\text{excitator}} \approx \omega_{\text{rezonator}}$$

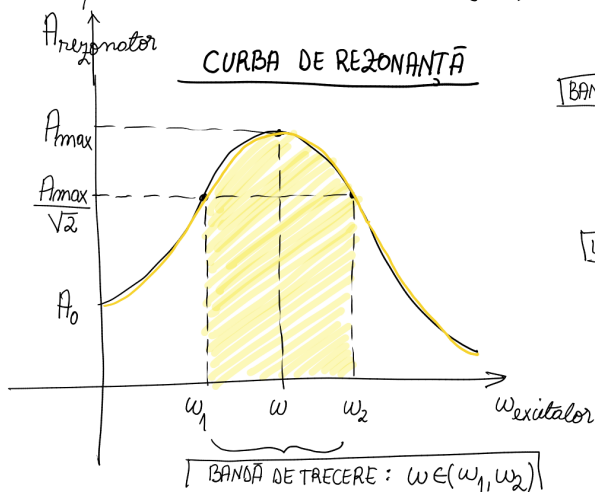
(E) (R)

EXPERIMENT 2



Obs1 Forța $\vec{F}(t)$ are rolul de a întreține oscilațiile pendulului elastic.

Pentru a caracteriza numeric rezonanța se reprezintă curba de rezonanță, adică graficul amplitudinilor rezonatorului (R) în funcție de frecvența impusă de excitator $\omega_{\text{excitator}} \Rightarrow A(\omega_{\text{excitator}})$



$\Rightarrow$ AMPLITUDINI SEMNIFICATIVE: $A \in (\frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}, A)$

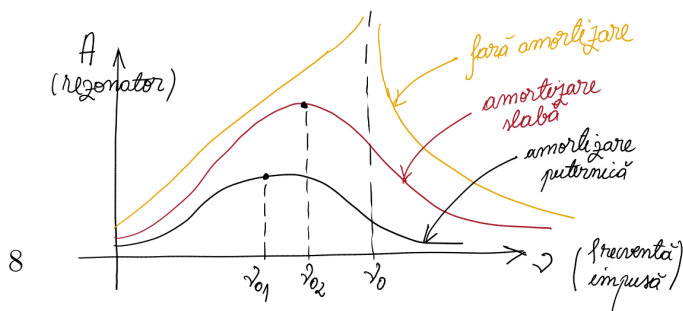
$\Rightarrow$ REZONANȚĂ

BANDA DE TRECERE $\stackrel{\text{def}}{=}$ intervalul de pulsații ale excitatorului pentru care amplitudinea rezonatorului este semnificativă $A > \frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}$, unde $A_{\max}$ = amplitudinea de rezonanță

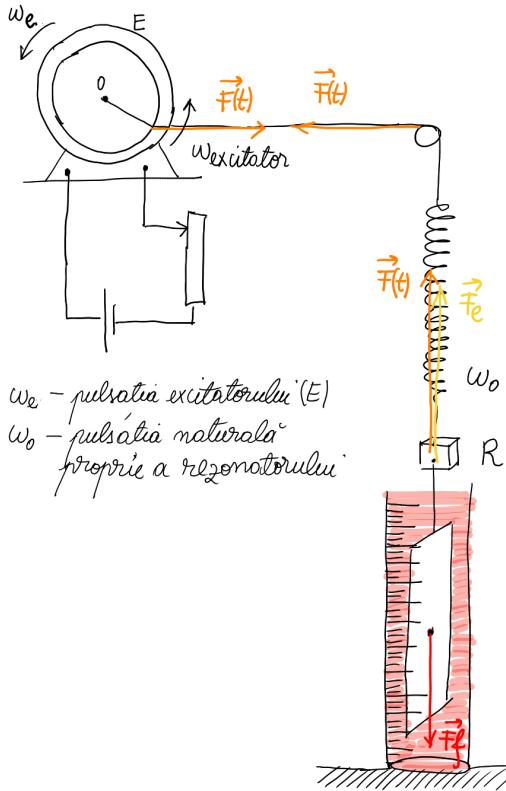
LĂRGIME DE BANDĂ $\stackrel{\text{def}}{=} \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$

FACTOR DE CALITATE $\stackrel{\text{def}}{=} Q = \frac{\omega_0}{|\omega_2 - \omega_1|}$

Obs. $\Delta\omega \downarrow \Rightarrow Q \uparrow$



REZONANȚĂ* (ANALIZĂ CANTITATIVĂ)



ω_e - pulsația excitatorului (E)
 ω_0 - pulsația naturală proprie a rezonatorului

$$\begin{cases} \vec{F}_e = -k \cdot A \sin(\omega_e \cdot t) \\ \vec{F}_f = -C \cdot \vec{v} = -CA\omega_e \cos(\omega_e t) \\ \vec{F} = F_{\max} \cdot \sin(\omega_e \cdot t) \end{cases}$$

Principiul II : $\vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_f = m\vec{a}$
 $F - k \cdot x - C \cdot v = ma$

$$\Rightarrow F = ma + C\dot{x} + kx$$

$$\Rightarrow F_{\max} \sin(\omega_e t + \varphi_0) = -m\omega_e^2 A \sin(\omega_e t) + C\omega_e A \cos(\omega_e t) + kA \sin(\omega_e t)$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\Rightarrow F_{\max} \sin(\omega_e t) \cos \varphi_0 + F_{\max} \sin \varphi_0 \cos(\omega_e t) = C\omega_e A \cos(\omega_e t) + (kA - m\omega_e^2 A) \sin(\omega_e t)$$

dăm valori pentru :

$$t=0 : F_{\max} \sin \varphi_0 = C\omega_e A$$

$$t = \frac{T}{4} : F_{\max} \cos \varphi_0 = kA - m\omega_e^2 A$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan \varphi_0 = \frac{C\omega_e}{k - m\omega_e^2}}$$

DIAGRAMA FAZORIALĂ A FORTELOR

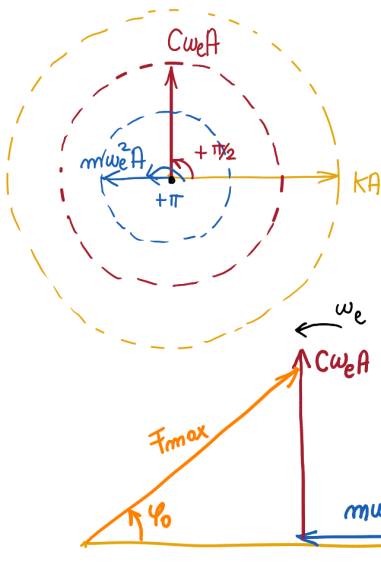


DIAGRAMA FAZORIALĂ A FORTELOR

Din diagrama fazorială, folosind Teorema lui Pitagora:
 $F_{\max}^2 = (kA - m\omega_e^2 A)^2 + (C\omega_e A)^2 = A^2 [C^2 \omega_e^2 + (k - m\omega_e^2)^2]$

$$A = \frac{F_{\max}}{\sqrt{C^2 \omega_e^2 + (k - m\omega_e^2)^2}} = \frac{F_{\max}}{\omega_e \sqrt{C^2 + \left(\frac{k}{\omega_e} - m\omega_e\right)^2}}$$

$$A(F_{\max}, \omega_e, C)$$

$$v_{\max} = A\omega_e = \frac{F_{\max}}{\sqrt{C^2 + \left(\frac{k}{\omega_e} - m\omega_e\right)^2}}$$

$$v_{\max}(F_{\max}, \omega_e, C)$$

viteza, forța rezistivă, puterea transferată maxime: $[v = v_{\max}] \Leftrightarrow \frac{k}{\omega_e} - m\omega_e = 0 \Leftrightarrow \omega_e^2 = \frac{k}{m} = \omega_0^2 \Leftrightarrow [\omega_e = \omega_0]$
 amplitudinea, forța elastică maxime: $[A = A_{\max}] \Leftrightarrow \omega_e = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{C^2}{2m^2}} \Leftrightarrow [\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}]$

REZONANȚĂ REPREZINTĂ FENOMENUL DE TRANSFER MAXIM DE ENERGIE DE LA UN SISTEM EXCITATOR(E) LA UN SISTEM REZONATOR(R).

Teoria lucrării

A. Oscilații libere. Oscilații cu frecare

Oscilații unghiulare. Pendulul Pohl.

În cazul *oscilațiilor unghiulare* ale arcului pendulului Pohl acționează M_{el} (*momentul forței elastice al arcului pendulului*) și M_{Ff} (*momentul forțelor de frânare controlate electromagnetic prin curenții eddy*).

$$M_{el} = -D^0 \cdot \Phi \text{ și } M_{Ff} = -C \cdot \dot{\Phi}$$

Φ = unghiul de rotație, elongația unghiulară pe scara pendulului Pohl

$\dot{\Phi}$ =viteza unghiulară

D^0 = constata elastică unghiulară a pendulului Pohl

C = factor de proporționalitate între viteza unghiulară $\dot{\Phi}$ și M_{Ff} .

Principiul II pentru momentele forțelor:

$$M = M_{el} + M_{Ff} = -D^0\Phi + -C\dot{\Phi}$$

care ne conduce la ecuația de mișcare:

$$I \cdot \ddot{\Phi} + C\dot{\Phi} + D^0\Phi = 0$$

I = momentul de inerție

$\ddot{\Phi}$ =acelerația unghiulară

Împărțind ecuația de mișcare la I , folosind notația $\delta = \frac{C}{2I}$ pe care îl numim coeficient de amortizare, și $\omega_0^2 = \frac{D^0}{I}$ frecvența naturală proprie a oscilației fără frecări $\Rightarrow$

$$\ddot{\Phi} + 2\delta \cdot \dot{\Phi} + \omega_0^2\Phi = 0$$

Soluția acestei ecuații diferențiale de ordinul II este:

$$\Phi(t) = \Phi_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos \omega t$$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ - pulsația oscilației cu frecări

Oscilații liniare. Pendulul elastic

În cazul *oscilațiilor liniare* ale unui pendul elastic liniar acționează F_{el} (*forța elastică a arcului deformat*) și F_f (*forța de frecare*).

$$F_{el} = -k \cdot x \text{ și } F_f = -C \cdot \dot{x}$$

x = poziția, elongația liniară a pendului elastic

$\dot{x}$ =viteza liniară

k = constanta elastică liniară a pendului elastic

C =factor de proporționalitate între viteza liniară $\dot{x}$ și F_f

Principiul II pentru forțe:

$$F = F_{el} + F_f = -k \cdot x + -C \cdot \dot{x}$$

care ne conduce la ecuația de mișcare:

$$m \cdot \ddot{x} + C \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0$$

m =masa

$\ddot{x}$ =acelerația

Împărțind ecuația de mișcare la m , folosind notația $\delta = \frac{C}{2m}$ pe care îl numim coeficient de amortizare, și $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ frecvența naturală proprie a oscilației fără frecări $\Rightarrow$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

Soluția acestei ecuații diferențiale de ordinul II este:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\delta t} \cos \omega t$$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ - pulsația oscilației cu frecări

Obiectiv A1.

Determinarea perioadei proprii de oscilație (T_0) și a pulsației proprii de oscilație (ω_0) a pendulului Pohl în cazul cu frecări neglijabile.

Pentru a determina *pulsația proprie* a pendulului Pohl ω_0 , în cazul fără frecări ($I_f = 0$):

- * Deviați complet pendulul
- * Măsurați intervalul de timp necesar unui număr de oscilații (de exemplu $N = 10$)
- * Pentru precizie luați mai multe măsurători și prezentați valoarea lor mediată

Δt	N	T_0 perioada proprie	$\overline{T_0}$ perioada proprie medie	$ \Delta T_0 $ abaterea de la medie	$ \overline{\Delta T_0} $ abaterea medie

$$\begin{array}{ll}
 T_0 = \overline{T_0} + |\overline{\Delta T_0}| \rightarrow & T_0 = \dots \pm \dots \\
 \omega_0 = \overline{\omega_0} + |\overline{\Delta \omega_0}| \rightarrow & \omega_0 = \dots \pm \dots
 \end{array}$$

Obiectiv A2.

Determinarea perioadei de oscilație (T) și a pulsației de oscilație (ω) a pendulului Pohl în cazul cu diferite frecări. Determinarea raportului de amortizare K , a decrementului logaritmic Λ , a coeficientului de amortizare δ .

$$I_f \sim 0,25A, U_{\sim} = 4V$$

Oscilația #	Φ (grade pe scală)	$K = \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n}$	$\Lambda = \ln K$	δ (1/s) $\delta = \frac{\ln \frac{\Phi_n}{\Phi_0}}{\Delta t}$	ω (rad/s) $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$
1		-	-		
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					

Pentru a determina noua *pulsație* (ω) a pendulului Pohl , *raportul de amortizare* (K), *decrementul logaritmic* (Λ), coeficientul de amortizare (δ), în cazul cu frecări ($I_f \neq 0$):

- * Deviați complet pendulul
- * Măsurați timpul necesar Δt până la amortizarea completă a oscilației
- * Notați în tabel amplitudinile succesive Φ de pe o parte a pendulului
- * Pentru precizie repetați măsurătoarea, și comparați valorile obținute

Legea mișcării oscilatorului amortizat este:

$$\Phi(t) = \Phi_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cos \omega t, \quad \text{cu coeficientul de amortizare } \delta = \frac{\ln \frac{\Phi_n}{\Phi_0}}{\Delta t}$$

Legea arată că amplitudinea unghiulară scade exponențial, și după fiecare interval de timp $t = \frac{1}{\delta}$ amplitudinea unghiulară Φ scade de e ori. Raportul de amortizare K , în acest model, $K = \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = e^{\delta T}$, rămâne constant. *Reprezentați grafic legea de mișcare.*

Obiectiv A2.

Determinarea perioadei de oscilație (T) și a pulsației de oscilație (ω) a pendulului Pohl în cazul cu diferite frecări. Determinarea raportului de amortizare K , a decrementului logaritmic Λ , a coeficientului de amortizare δ .

$$I_f \sim 0,4A, U_{\sim} = 6V$$

Oscilația #	Φ (grade pe scală)	$K = \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n}$	$\Lambda = \ln K$	δ (1/s) $\delta = \frac{\ln \frac{\Phi_n}{\Phi_0}}{\Delta t}$	ω (rad/s) $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$
1		-	-		
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					

Pentru a determina noua *pulsație* (ω) a pendulului Pohl , *raportul de amortizare* (K), *decrementul logaritmic* (Λ), coeficientul de amortizare (δ), în cazul cu frecări ($I_f \neq 0$):

- * Deviați complet pendulul
- * Măsurați timpul necesar Δt până la amortizarea completă a oscilației
- * Notați în tabel amplitudinile succesive Φ de pe o parte a pendulului
- * Pentru precizie repetați măsurătoarea, și comparați valorile obținute

Legea mișcării oscilatorului amortizat este:

$$\Phi(t) = \Phi_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cos \omega t, \quad \text{cu coeficientul de amortizare } \delta = \frac{\ln \frac{\Phi_n}{\Phi_0}}{\Delta t}$$

Legea arată că amplitudinea unghiulară scade exponențial, și după fiecare interval de timp $t = \frac{1}{\delta}$ amplitudinea unghiulară Φ scade de e ori. Raportul de amortizare K , în acest model, $K = \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = e^{\delta T}$, rămâne constant. *Reprezentați grafic legea de mișcare.*

Obiectiv A2.

Determinarea perioadei de oscilație (T) și a pulsației de oscilație (ω) a pendulului Pohl în cazul cu diferite frecări. Determinarea raportului de amortizare K , a decrementului logaritmic Λ , a coeficientului de amortizare δ .

$$I_f \sim 0,55A, U_{\sim} = 8V$$

Oscilația #	Φ (grade pe scală)	$K = \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n}$	$\Lambda = \ln K$	δ (1/s) $\delta = \frac{\ln \frac{\Phi_n}{\Phi_0}}{\Delta t}$	ω (rad/s) $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$
1		-	-		
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					

Pentru a determina noua *pulsație* (ω) a pendulului Pohl , *raportul de amortizare* (K), *decrementul logaritmic* (Λ), coeficientul de amortizare (δ), în cazul cu frecări ($I_f \neq 0$):

- * Deviați complet pendulul
- * Măurați timpul necesar Δt până la amortizarea completă a oscilației
- * Notați în tabel amplitudinile succesive Φ de pe o parte a pendulului
- * Pentru precizie repetați măsurătoarea, și comparați valorile obținute

Legea mișcării oscilatorului amortizat este:

$$\Phi(t) = \Phi_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cos \omega t, \quad \text{cu coeficientul de amortizare } \delta = \frac{\ln \frac{\Phi_n}{\Phi_0}}{\Delta t}$$

Legea arată că amplitudinea unghiulară scade exponențial, și după fiecare interval de timp $t = \frac{1}{\delta}$ amplitudinea unghiulară Φ scade de e ori. Raportul de amortizare K , în acest model, $K = \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = e^{\delta T}$, rămâne constant. *Reprezentați grafic legea de mișcare.*

Obiectiv A2.

Determinarea perioadei de oscilație (T) și a pulsației de oscilație (ω) a pendulului Pohl în cazul cu diferite frecări. Determinarea raportului de amortizare K , a decrementului logaritmic Λ , a coeficientului de amortizare δ .

$$I_f \sim 0,9A, U_{\sim} = 12V$$

Oscilația #	Φ (grade pe scală)	$K = \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n}$	$\Lambda = \ln K$	δ (1/s) $\delta = \frac{\ln \frac{\Phi_n}{\Phi_0}}{\Delta t}$	ω (rad/s) $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$
1		-	-		
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					

Pentru a determina noua *pulsație* (ω) a pendulului Pohl , *raportul de amortizare* (K), *decrementul logaritmic* (Λ), coeficientul de amortizare (δ), în cazul cu frecări ($I_f \neq 0$):

- * Deviați complet pendulul
- * Măsurați timpul necesar Δt până la amortizarea completă a oscilației
- * Notați în tabel amplitudinile succesive Φ de pe o parte a pendulului
- * Pentru precizie repetați măsurătoarea, și comparați valorile obținute

Legea mișcării oscilatorului amortizat este:

$$\Phi(t) = \Phi_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cos \omega t, \quad \text{cu coeficientul de amortizare } \delta = \frac{\ln \frac{\Phi_n}{\Phi_0}}{\Delta t}$$

Legea arată că amplitudinea unghiulară scade exponențial, și după fiecare interval de timp $t = \frac{1}{\delta}$ amplitudinea unghiulară Φ scade de e ori. Raportul de amortizare K , în acest model, $K = \frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = e^{\delta T}$, rămâne constant. *Reprezentați grafic legea de mișcare.*

Teoria lucrării

B. Oscilații forțate

Oscilații unghiulare forțate. Pendulul Pohl.

Dacă pendulul Pohl de torsiune este stimulat periodic din exterior de un moment al forței extern M_e dat de un disc motor rotitor:

$$M_e = M_0 \cdot \cos(\omega_e t)$$

Legea mișcării devine:

$$\ddot{\Phi} + 2\delta\dot{\Phi} + \omega_0^2\Phi = F_{max} \cos(\omega_e t)$$

$$\text{unde } F_{max} = \frac{M_{max}}{I}$$

În regim staționar, soluția acestei ecuații diferențiale de ordinul II neomogenă este:

$$\Phi(t) = \Phi_e \cos(\omega_e t - \alpha)$$

$$\Phi_e = \frac{\Phi_0}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega_e}{\omega_0})^2]^2 + (2\frac{\delta}{\omega_0} \frac{\omega_e}{\omega_0})^2}}, \quad \Phi_e = \frac{F_{max}}{\omega_0^2}$$

$$\alpha = \arctan \frac{2\delta\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}$$

Oscilații liniare forțate. Pendulul elastic(cls a XI-a)

Dacă pendulul elastic liniar este stimulat periodic din exterior de o forță F_e dată de un motor liniar:

$$F_e = F_{max} \cdot \cos(\omega_e t)$$

Legea mișcării devine:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = F_{max} \cos(\omega_e t)$$

În regim staționar, soluția acestei ecuații diferențiale de ordinul II neomogenă este:

$$x(t) = A \cos(\omega_e t - \alpha)$$

$$A = \frac{F_{max}}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega_e}{\omega_0})^2]^2 + (2\frac{\delta}{\omega_0} \frac{\omega_e}{\omega_0})^2}}, \quad A = \frac{F_{max}}{\omega_0^2}$$

$$\alpha = \arctan \frac{2\delta\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}$$

La o analiză a ecuației amplitudinii unghiulare Φ_e a pendulului Pohl în regim forțat cu discul motor extern:

$$\Phi_e = \frac{\Phi_0}{\sqrt{[1 - (\frac{\omega_e}{\omega_0})^2]^2 + (2\frac{\delta}{\omega_0} \frac{\omega_e}{\omega_0})^2}}$$

Se desprind următoarele observații:

- Cu cât F_{max} este mai mare, cu atât amplitudinea unghiulară Φ_e este mai mare.
- **Pentru o valoare fixă a F_{max} , $\Phi \rightarrow \Phi_{max}$ pentru $\omega_e \rightarrow \omega_0$. (maximul curbei de rezonanță $\Phi_e(\omega_e)$)**
- Cu cât este mai mare δ , cu atât este mai mică Φ_e
- Pentru $\delta \rightarrow 0$, $\Phi_e \rightarrow \Phi_{max}$, dacă $\omega_e = \omega_0$

Obiectiv B1.

Determinarea curbelor de rezonanță. Determinarea în regim staționar a amplitudinilor Φ_e stabilite ale pendulului Pohl, la diferite pulsații exterioare impuse de discul rotitor ω_e . Trasarea curbei de rezonanță: $\Phi_e(\omega_e)$

	ω_e - pulsația discului motor extern	Φ_e - amplitudinea unghilară staționară a oscilației forțate a pendulului Pohl
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

Pentru a determina curbele de rezonanță:

- * Legați pendulul Pohl la discul motor rotitor.
- * Folosind butoanele de reglare brută și reglare fină alegeți pe rând diferite pulsații ω_e care vor stimula pendulul Pohl.
- * Așteptați stabilirea unui regim staționar de oscilație
- * Notați amplitudinile unghilare maxime Φ_e stabilite corespunzătoare pulsației ω_e

*Trasați graficul curbei de rezonanță $\Phi_e(\omega_e)$ și determinați pulsația ω_e pentru care curba de rezonanță atinge un maxim. Cu alte cuvinte *transferul de energie* de la discul motor rotitor este *maxim* către pendulul Pohl.*

Obiectiv B2.

Observarea defazajului între pendulul Pohl de torsiune și discul motor extern excitator, pentru valori mici ale frecării, pentru diferite pulsații ω_{ext} .

În figura de mai jos este reprezentată diferența de fază α a oscilației forțate a pendulului Pohl în funcție de pulsația ω_e care stimulează din exterior pendulul.

$$\alpha = \arctan \frac{2\delta\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}$$

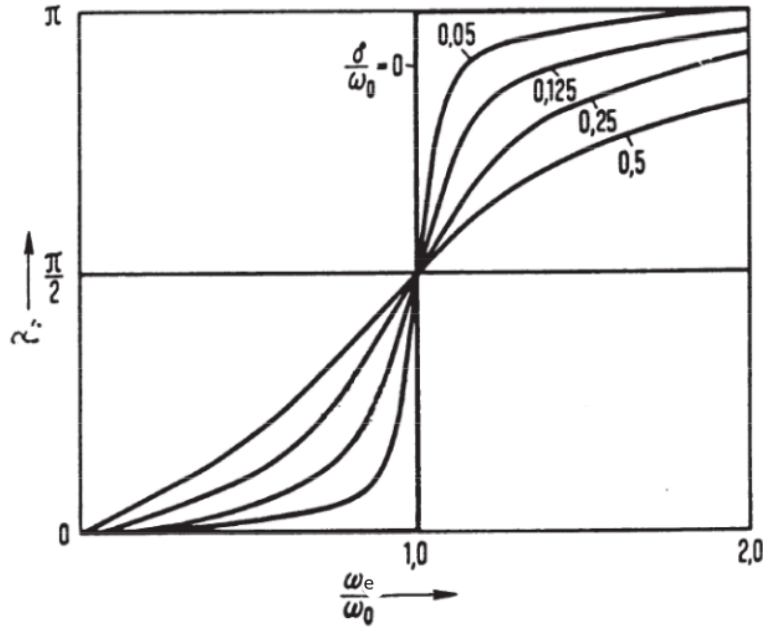


Figura 10: Defazajul oscilației forțate pentru diferite frecări δ

Dacă pulsațiile stimulante ω_e sunt mici, diferența de fază disc motor -Pendul Pohl este aproape zero, adică discul motor și pendulul Pohl *sunt în fază*.

Dacă pulsațiile stimulate ω_e sunt mult mai mari decât ω_0 , diferența de fază disc motor-Pendul Pohl este aproape 180° , adică discul motor și pendulul Pohl *sunt în opoziție de fază*.

Cu cât frecările sunt mai mici, cu atât tranziția de la regimul "în fază" la regimul în "opoziție de fază" este mai rapidă.